EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta** ….023*

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(1,2)$ și $B(3,2)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}$.

(4p) **c)** Să se calculeze modulul numărului complex $z=3+4i$.

(4p) **d)** Să se determine numărul punctelor de intersecție dintre dreapta $2x+y=5$ și cercul $x^2+y^2=5$.

(2p) **e)** Să se arate că punctele $A(1,2)$, $B(2,3)$, $C(3,4)$ sunt coliniare.

(2p) **f)** Să se calculeze $\sin B-\cos C$, știind că triunghiul ABC este dreptunghic, cu $m(\hat{A})=90°$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3x$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+...+f(10)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $C_{10}^{1}+C_{10}^{9}$.

(3p) **c)** Să se determine probabilitatea ca un element din $\mathbf{Z}_5$ să fie inversabil, față de înmulțire.

(3p) **d)** Să se determine restul împărțirii polinomului $f=X^3$ la polinomul $g=X-1$.

(3p) **e)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(1+x^2)=1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{2x}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\int_0^x f(t)\,dt$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{C})$ se consideră mulțimea $M = \{ X \in M_2(\mathbf{C}) \mid \exists k \in \mathbf{N},\ k \geq 2,\ X^k = O_2 \}$

și matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A \in M$.

(4p) **b)** Să se arate că $B^2 - (a+d)B + (ad - bc)I_2 = O_2$, $\forall\ B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$.

(4p) **c)** Să se verifice că $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$, $\forall\ X, Y \in M_2(\mathbf{C})$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $X \in M$, atunci $X^2 = O_2$.

(2p) **e)** Să se arate că pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, ecuația $Z^n = A$ nu are soluție în $M_2(\mathbf{C})$.

(2p) **f)** Să se arate că pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, funcția $f : M_2(\mathbf{C}) \to M_2(\mathbf{C})$, $f(X) = X^n$ nu este surjectivă.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $B \in M$, atunci $\det\left(I_2 + B + B^2 + \ldots + B^{n-1}\right) = 1$, pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră numerele $n, a, b \in \mathbf{N}^*$, funcția $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n$

și integralele $I_n = \int_0^{\pi} f_n(x) \cdot \sin x\, dx$ și $J_n = \int_0^{\frac{a}{b}} f_n(x) \cdot \sin x\, dx$.

(4p) **a)** Să se rezolve ecuația $f_n(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze J_1.

(4p) **c)** Să se arate că există $M > 0$ astfel încât $|f_1(x)| \leq M$, $\forall x \in [0, \pi]$.

(2p) **d)** Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{s^n}{n!} = 0$, unde $s \in (0, \infty)$.

(2p) **e)** Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = 0$.

(2p) **f)** Folosind metoda integrării prin părți, să se arate că

$$J_n = \left(- f_n(x) \cdot \cos x + f_n'(x) \cdot \sin x + f_n^{(2)}(x) \cdot \cos x - f_n^{(3)}(x) \cdot \sin x - \ldots + (-1)^{n+1} f_n^{(2n)}(x) \cdot \cos x\right) \Big|_0^{\frac{a}{b}}.$$

(2p) **g)** Folosind faptul că $f_n^{(k)}(0) \in \mathbf{Z}$, $f_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbf{Z}$, $\forall\ n, a, b \in \mathbf{N}^*$, $\forall\ k \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$, să se arate că numărul π este irațional.